Eine gemischte Randwertaufgabe für partielle Differentialgleichungen n-ter Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Marburg

vorgelegt von

Djiang Schuo-min
aus Hupeh (China)

Marburg 1934

R. Friedrich's Universitäts-Buchdruckerei (Inhaber Karl Gleiser)

Von der Fakultät als Dissertation angenommen am 19. Juni 1935.

Referent: Dr. Rellich.

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juni 1935.

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Einleitung.

In dieser Arbeit wird folgendes Problem behandelt: Es soll eine Lösung $u(x, t)$ der Differentialgleichung [1])

$$L[u] = \sum_{i=0}^{2p} a_{i,q}(x,t) u_{x^i t^q} + \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t) u_{x^i t^k} = f(x,t)$$

gefunden werden, die folgenden Randbedingungen genügt:

$$\left.\begin{aligned} u_{tj}|^{t=0} &= \omega_j(x) \quad (j = 0, .. q-1) \\ u_{x^l}|^{x=0} &= \varphi_l(t) \\ u_{x^l}|^{x=1} &= \psi_l(t) \end{aligned}\right\} \quad (l = 0, .. p-1)$$

Von der Lösung $u(x,t)$ wird gefordert, daß ihre Ableitungen

$$u_{t^k x^i}(x,t),\ u_{x^i t^k}(x,t) \ (i = 0, .. 2p-1;\ k = 0, .. q-1)$$
$$u_{t^q x^i}(x,t),\ u_{x^i t^q}(x,t) \ (i = 0, .. 2p)$$

in dem Bereich $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$ stetig sind und den folgenden Vertauschungsrelationen genügen:

$$u_{t^k x^i}(x,t) = u_{x^i t^k}(x,t) \ (i = 0, .. 2p-1;\ k = 0, .. q-1)$$
$$u_{t^q x^i}(x,t) = u_{x^i t^q}(x,t) \ (i = 0, .. 2p)$$

für $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$.

Ferner bedeuten hier im Einzelnen:

(1) $a_{i,k}(x,t)$ $(i = 0 .. 2p-1;\ k = 0, .. q-1)$ stetige Funktionen im Bereich $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$ $(p \geqq 1,\ q \geqq 1,\ T > 0$ p, q ganz rational).

$a_{i,q}(x,t)$ ist i-mal in demselben Bereich stetig nach x differenzierbar für $i = 0, \ldots 2p$; $a_{2p,q}(x,t) = 1$.

Ferner sollen die $a_{i,q}(x,t)$ $(i = 0, .. 2p)$ noch die Eigenschaft besitzen, daß jede in dem Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ $2p$-mal stetig differenzierbare Lösung $w(x)$ der Randwertaufgabe:

---

1) $u_{x^i t^k}$ bedeutet $\dfrac{\partial^k}{\partial t^k} \dfrac{\partial^i u}{\partial x^i}$

$$\sum_{i=0}^{2p} a_{i,q}(x,t)\ \frac{d^i w(x)}{dx^i} = 0 \quad (t \text{ aus } 0 \leqq t \leqq T)$$

$$\frac{d^l w(x)}{dx^l}\Big/^{x=0} = \frac{d^l w(x)}{dx^l}\Big/^{x=1} = 0 \quad (l = 0, \ldots p-1)$$

identisch verschwindet.

(2) $w_j(x)$, $w'_j(x)$, .. $w_j^{(2p)}(x)$ $(j = 0, \ldots q-1)$ sind für $0 \leqq x \leqq 1$ stetig; $\varphi_l(t)$, $\varphi'_l(t)$, .. $\varphi_l^{(q)}(t)$; $\psi_l(t)$, $\psi'_l(t)$, .. $\psi_l^{(q)}(t)$ $(l = 0, \ldots p-1)$ sind für $0 \leqq t \leqq T$ stetig, für sie gelten die folgenden Anschließungsrelationen:

$$\frac{d^l \omega_j(x)}{dx^l}\Big/^{x=0} = \frac{d^j \varphi^l(t)}{dt^j}\Big/^{t=0}$$

$$\frac{d^l \omega_j(x)}{dx^l}\Big/^{x=1} = \frac{d^j \psi_l(t)}{dt^j}\Big/^{t=0}$$

für $j = 0, \ldots q-1$; $l = 0, \ldots p-1$.

(3) $f(x,t)$ ist für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$ stetig.

Dieses Problem ist für den speziellen Fall $p = q = 1$, $L[u] = u_{xxt} + au$ (a const) von F. Rellich [1]) durch spezielle Angabe einer Grundlösung gelöst worden. Überhaupt können Probleme dieser Art auch sonst auf mannigfache Weise behandelt werden so z. B. nach Heaviside, wenn die Koefizienten nicht von t abhängen oder durch Überführung auf eine Integrodifferentialgleichung, die durch sukzessive Approximation gelöst wird. Diese letzte Methode wird hier auch verwendet. Einen tieferen Einblick vermittelt jedoch die Grundlösung, mit deren Hilfe man die Lösung unseres Problems explizite angeben kann. Die Existenz einer Grundlösung wird ebenfalls durch sukzessive Approximation bewiesen. Man erhält so ein Analogon zur Riemann'schen Integrationsmethode für partielle Differentialgleichungen, deren Charakteristiken aus den Linien $x = \text{const}$ und $t = \text{const}$ bestehen. Diese Methoden sind auch bei partiellen Differentialgleichungen in mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen brauchbar. Randwertprobleme der hier behandelten Art treten bei gewissen Fragen aus der Theorie der elastischen und plastischen Deformationen auf [2]).

---

1) Göttinger Vorlesung über partielle Differentialgleichungen. S. S. 1934.

2) S. Kinow, Schichtverbiegung als Folgeerscheinungen plastischer Deformationen von Erdkrustenteilen. Geologische Rundschau Bd. 25. 1934.

Dort ist insbesondere der Fall einer Differentialgleichung von Interesse, die hinsichtlich x von der vierten Ordnung, hinsichtlich t von der ersten Ordnung ist.

Im Einzelnen gliedert sich die Arbeit folgendermaßen:

§ 1. Zurückführung auf ein Problem mit verschwindenden Randwerten.

§ 2. Ansatz zur Lösung des Problems und Aufstellung der Grundlösung.

§ 3. Auflösung einer Integrodifferentialgleichung, welcher die Grundlösung genügt.

§ 4. Existenz der Grundlösung.

§ 5. Direkter Existenzbeweis und Eindeutigkeit.

§ 6. Verallgemeinerung auf Differentialgleichungen in mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen.

Anhang.

§ 1. Zurückführung auf ein Problem mit verschwindenden Randwerten.

Wir können das in der Einleitung formulierte inhomogene Problem in ein Problem mit verschwindenden Randwerten verwandeln. Sei $r(x,t)$ eine Funktion, welche die vorgelegten Randbedingungen erfüllt und für welche die Ableitungen $r_{t^k x^i}(x,t) = r_{x^i t^k}(x,t)$ $(i = 0, \ldots 2p;\ k = 0, \ldots q)$ in dem Bereiche $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$ stetig sind. Wäre nun das Problem mit verschwindenden Randwerten lösbar, dann gäbe es ein $w(x,t)$ mit stetigen

$$w_{x^i t^k}(x,t) = w_{t^k x^i}(x,t) \quad (i = 0, \ldots 2p-1;\ k = 0, \ldots q-1)$$

und $$w_{x^i t^q}(x,t) = w_{t^q x^i}(x,t) \quad (i = 0, \ldots 2p)$$

in $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$, für das gilt:

$$L[w] = f(x,t) - L[r]$$
$$w_{t^j}|^{t=0} = 0 \quad (j = 0, \ldots q-1)$$
$$w_{x^l}|^{x=0} = w_{x^l}|^{x=1} = 0 \quad (l = 0, \ldots p-1)$$

Setzen wir nun $u(x,t) = w(x,t) + r(x,t)$, dann ist:

$$L[u] = L[w] + L[r] = f(x,t) - L[r] + L[r] = f(x,t)$$
$$u_{t^j}(x,t)|^{t=0} = w_{t^j}|^{t=0} + r_{t^j}|^{t=0} = w_j(t)$$
$$\text{für } j = 0, \ldots q-1.$$
$$u_{x^l}|^{x=0} = w_{x^l}|^{x=0} + r_{x^l}|^{x=0} = \varphi_l(t)$$
$$u_{x^l}|^{x=1} = w_{x^l}|^{x=1} + r_{x^l}|^{x=1} = \psi_l(t)$$
$$\text{für } l = 0, \ldots p-1.$$

$u(x,t)$ ist also eine Lösung unseres vorgelegten Problems.

Eine Funktion $r(x,t)$ mit den vorhin geschilderten Eigenschaften können wir uns folgendermaßen beschaffen.

Die allgemeine Lösung von $\dfrac{d^{2p}\varrho}{dx^{2p}} = 0$ ist $\varrho = \sum_{i=0}^{2p-1} c_i x^i$ (c_i von x unabhängig). Die folgenden Randbedingungen

$$\frac{\partial^l \varrho}{\partial x^l}/^{x=0} = \frac{\partial^l \sum_{i=0}^{2p-1} c_i x^i}{\partial x^l}/^{x=0} = \varphi_l(t)$$

$$\frac{\partial^l \varrho}{\partial x^l}/^{x=1} = \frac{\partial^l \sum_{i=0}^{2p-1} c_i x^i}{\partial x^l}/^{x=1} = \psi_l(t)$$

$$(l = 0, \ldots p-1)$$

stellen ein lineares Gleichungssystem von $2p$ Gleichungen in $2p$ Unbekannten $C_0, \ldots C_{2p-1}$ dar. Die Determinante ist von Null verschieden; denn wäre sie gleich Null, so würde das homogene System mit verschwindenden rechten Seiten ein nicht-triviales Lösungssystem besitzen, das eine nicht identisch verschwindende Lösung der Randwertaufgabe

$$\frac{d^{2p}u(x)}{dx^{2p}} = 0, \quad \frac{d^l u}{dx^l}/^{x=0} = \frac{d^l u}{dx^l}/^{x=1} = 0 \quad (l = 0, \ldots p-1)$$

zur Folge hat, was bekanntlich nicht sein kann. Wir können also die c_i $(i = 0, \ldots 2p-1)$ aus dem inhomogenen Gleichungssystem bestimmen.

$c_i = c_i(t)$ $(i = 0, \ldots 2p-1)$ sind im Intervall $0 \leqq t \leqq T$ q-mal nach t differenzierbar, was unmittelbar aus der q-maligen Differenzierbarkeit von $\varphi_l(t)$, $\psi_l(t)$ $(l = 0, \ldots p-1)$ folgt. Wegen $\varrho(x, t) = \sum_{i=0}^{2p-1} c_i(t) x^i$ sind die Differentiationen von ϱ nach x und nach t vertauschbar. Nach den Anschließungsrelationen für $\varphi_l(t)$, $\psi_l(t)$ und $\omega_j(x)$ werden:

$$\frac{d^l \omega_j(x)}{dx^l}/^{x=0} = \frac{d^j \varphi_l(t)}{dt^j}/^{t=0} = \frac{\partial^j \frac{\partial^l \varrho}{\partial x^l}/^{x=0}}{\partial t^j}/^{t=0} = \frac{\partial^l \varrho_{tj}/^{t=0}}{\partial x^l}/^{x=0}$$

ebenso:

$$\frac{d^l \omega_j(x)}{dx^l}/^{x=1} = \frac{\partial^l \varrho_{tj}/^{t=0}}{\partial x^l}/^{x=1} \quad (j = 0, \ldots q-1;\ l = 0, \ldots p-1)$$

Wir setzen nun $\sigma(x, t) = \sum_{j=0}^{q-1} [\omega_j(x) - \varrho_{tj}/^{t=0}] \frac{t^j}{j!}$, $\sigma(x, t)$ ist mit $\sigma_{t^k x^i} = \sigma_{x^i t^k}$ $(i = 0, \ldots 2p;\ k = 0, \ldots q)$ im Bereich $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$ wegen der Differenzierbarkeitseigenschaften von $\omega_j(x)$ und $\varrho(x, t)$ stetig. $r(x, t) = \varrho(x, t) + \sigma(x, t)$ besitzt nun wegen der

vorhin angeschriebenen Anschließungsrelationen zwischen $\omega_j(x)$ und $\varrho(x,t)$ alle verlangten Eigenschaften.

$$\begin{aligned} r_{t^j}|^{t=0} &= \varrho_{t^j}|^{t=0} + \sigma_{t^j}|^{t=0} = \varrho_{t^j}|^{t=0} + \omega_j(x) - \varrho_{t^j}|^{t=0} \\ &= \omega_j(x) \qquad (j=0,\ ..\ q-1). \\ r_{x^l}|^{x=0} &= \varrho_{x^l}|^{x=0} + \sigma_{x^l}|^{x=0} \\ &= \varrho_{x^l}|^{x=0} + \sum_{j=0}^{q-1}\left[\frac{d^l\omega_j(x)}{dx^l}|^{x=0} - \frac{\partial^l \varrho_{t^j}|^{t=0}}{\partial x^l}|^{x=0}\right]\frac{t^j}{j!} \\ &= \varphi_l(t) \\ r_{x^l}|^{x=1} &= \psi_l(t) \qquad (l=0,\ ..\ p-1). \end{aligned}$$

Damit ist die Existenz einer $r(x,t)$ der verlangten Art vollständig bewiesen. Wir beschäftigen uns im folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur mit der folgenden Randwertaufgabe (A):

Die $a_{i,k}(x,t)$ und $f(x,t)$ besitzen dieselben in der Einleitung geschilderten Eigenschaften.

$u_{x^it^k} = u_{t^kx^i}(x,t)$ $(i=0,\ ..\ 2p-1;\ k=0,\ ..\ q-1)$; $u_{x^it^q} = u_{t^qx^i}$ $(i=0,\ ..\ 2p)$ sind in dem Bereich $0 \leqq t \leqq T$, $0 \leqq x \leqq 1$ stetig.

$$L[u] = \sum_{i=0}^{2p} a_{i,q}(x,t)u_{x^it^q} + \sum_{i=0}^{2p-1}\sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t)u_{x^it^k} = f(x,t) \quad \ldots (1)$$

mit den Randbedingungen:

$$u_{t^j}|^{t=0} = 0 \quad (j=0,\ ..\ q-1)$$
$$u_{x^l}|^{x=0} = u_{x^l}|^{x=1} = 0 \quad (l=0,\ ..\ p-1).$$

§ 2. Ansatz zur Lösung des Problems und Aufstellung der Grundlösung $v(x,t;\ \xi,\tau)$.

$v(x,t;\xi,\tau)$ soll zunächst eine Funktion sein, die folgenden Bedingungen genügt:

(Zur Abkürzung bezeichnen wir

den Bereich: $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T,\ 0 \leqq \xi \leqq 1,\ 0 \leqq \tau \leqq T$ mit R,
den Bereich: $0 \leqq x \leqq \xi \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T,\ 0 \leqq \tau \leqq T$ mit R^-,
den Bereich: $0 \leqq \xi \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T,\ 0 \leqq \tau \leqq T$ mit R^+.)

(I) $v_{t^kx^i}(x,t;\ \xi,\tau)$, $v_{x^it^k}(x,t;\ \xi,\tau)$ $(i=0,\ ..\ 2p-2;\ k=0,\ \ldots\ q)$ sind in R stetig und es gilt in R $v_{t^kx^i} = v_{x^it^k}$ $(i=0,\ ..\ 2p-2;\ k=0,\ ..\ q)$.

$v_{t^k x^{2p-1}}$, $v_{x^{2p-1} t^k}$, $v_{t^k x^{2p}}$, $v_{x^{2p} t^k}$ $(k = 0, \ldots q)$ sind dagegen nur in R^- und R^+ stetig; sie können daher längs $x = \xi$ eventuell Sprünge machen. Es gilt ferner in R^-:

$$\begin{aligned} v_{t^k x^{2p-1}} &= v_{x^{2p-1} t^k} \\ v_{t^k x^{2p}} &= v_{x^{2p} t^k} \end{aligned} \quad (k = 0, \ldots q)$$

sowie in R^+

$$\begin{aligned} v_{t^k x^{2p-1}} &= v_{x^{2p-1} t^k} \\ v_{t^k x^{2p}} &= v_{x^{2p} t^k} \end{aligned} \quad (k = 0, \ldots q)$$

(II)^a Falls $q > 1$ ist,

$$v_{t^j}(x, t; \xi, \tau)|^{t=\tau} = 0 \quad \text{für } j = 0, \ldots q-2;\ 0 \leqq x, \xi \leqq 1.$$

Unter diesen vorläufigen Voraussetzungen machen wir für die Lösung $u(x, t)$ des Problems (A) in § 1 den Ansatz:

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi v(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau).$$

Wegen der Bedingungen (I) und (II)^a ist:

$$u_{t^k}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi v_{t^k}(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau)$$

$$\text{für } k = 0, \ldots q-1;\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T.$$

Hieraus folgen durch Differentiationen nach x:

$$u_{t^k x^i}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi v_{t^k x^i}(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau)$$

$$\text{für } i = 0, \ldots 2p-1;\ k = 0, \ldots q-1;\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T.$$

Für u_{t^q} gilt aber

$$\begin{aligned} u_{t^q} &= \frac{\partial}{\partial t} u_{t^{q-1}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi v_{t^{q-1}}(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) \\ &= \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi v_{t^q}(x, t; \xi, \tau) \cdot f(\xi, \tau + \int_0^1 d\xi v_{t^{q-1}}(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau)|^{\tau=t} \end{aligned}$$

$$\text{für } 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T.$$

Differenzieren wir weiter nach x, so erhalten wir für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$:

$$\begin{aligned} u_{t^q x^i}(x, t) = &\int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi\, v_{t^q x^i}(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) \\ &+ \int_0^1 d\xi\, v_{t^{q-1} x^i}(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau)|^{\tau=t} \end{aligned}$$

$$\text{für } i = 0, \ldots 2p-1.$$

$$u_{t^q x^{2p}} = \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi v_{t^q x^{2p}}(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)$$
$$+ \int_0^t d\tau v_{t^q x^{2p-1}}(x,t;\xi,\tau) \Big/ \begin{matrix}\xi = x-0\\ \xi = x+0\end{matrix} \cdot f(x,\tau)$$
$$+ \int_0^1 d\xi\, v_{t^q x^{2p}}(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau) \Big/^{\tau=t}$$
$$+ v_{t^q x^{2p-1}}(x,t;\xi,\tau) \Big/^{\tau=t} \Big/ \begin{matrix}\xi = x-0\\ \xi = x+0\end{matrix} \cdot f(x,t)$$

Nach diesen Formeln erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{2p} a_{i,q}(x,t) u_{t^q x^i} + \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t)\, u_{t^k x^i}$$
$$= \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi \left\{ \sum_{i=0}^{2p} a_{i,q} \cdot v_{t^q x^i}(x,t;\xi,\tau) + \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t) v_{t^k x^i}(x,t;\xi,\tau) \right\} f(\xi,\tau)$$
$$+ \int_0^1 d\xi \left[\sum_{i=0}^{2p} a_{i,q}(x,t) v_{t^q x^i}(x,t;\xi,\tau) \Big/^{\tau=t} \right] f(\xi,t)$$
$$+ \int_0^t d\tau f(x,\tau) \cdot v_{t^q x^{2p-1}}(x,t;\xi,\tau) \Big/ \begin{matrix}\xi = x-0\\ \xi = x+0\end{matrix}$$
$$+ v_{t^q x^{2p-1}}(x,t;\xi,\tau) \Big/^{\tau=t} \Big/ \begin{matrix}\xi = x-0\\ \xi = x+0\end{matrix} \cdot f(x,t)$$

Damit nun das gleich $f(x,t)$ wird, genügt es für die Grundlösung folgende Bedingungen weiter zu fordern:

(II^b) $$v_{t^q x^{l-1}}(x,t;\xi,\tau) \Big/^{t=\tau} = G(x,\xi,\tau)$$

wobei $G(x,\xi,\tau)$ die Green'sche Funktion der Diffenentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{2p} a_{i,q}(x,\tau) w_{x^i} = 0$$

mit den Randbedingungen

$$w_{x^l} \Big/^{x=0} = w_{x^l} \Big/^{x=1} = 0 \quad (l = 0, \ldots p-1)$$

bedeutet, deren Existenz durch unsere Voraussetzungen über $a_{i,q}$ sichergestellt ist. (Siehe Anhang).

(III) $$\sum_{i=0}^{2p} a_{i,q}(x,t)\, v_{t^q x^i}(x,t;\xi,\tau) + \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t) v_{t^k x^i}(x,t;\xi,\tau) = 0$$
in R^- und in R^+.

(IV) $$v_{t^q x^{2p-1}}(x,t;\xi,\tau) \Big/ \begin{matrix}x = \xi - 0\\ x = \xi + 0\end{matrix} = 0$$
für $0 \leqq t \leqq T,\ 0 \leqq \tau \leqq T$.

Damit $u(x,t)$ auch den Randbedingungen genügt, sind schließlich noch gefordert:

(V) $$v_{x^l}(x,t;\,\xi,\tau)/^{x=0} = v_{x^l}(x,t;\,\xi,\tau)/^{x=1} = 0$$
für $l = 0,\ \ldots\ p-1;\ 0 \leqq \xi \leqq 1,\ 0 \leqq t, \tau \leqq T.$

Zunächst sind hierdurch die Randbedingungen für

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi v(x,t;\,\xi,\tau) f(\xi,\tau) \text{ erfüllt.}$$

Denn es ist

$$\text{für } k = 0,\ \ldots\ q-1\colon\ u_{t^k}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi v_{t^k}(x,t;\,\xi,\tau) f(\xi,\tau)$$
$$\text{also } u_{t^k}(x,t)/^{t=0} = 0\ \ (k = 0,\ \ldots\ q-1).$$

Ferner ist:

$$u_{x^l}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi v_{x^l}(x,t;\,\xi,\tau) f(\xi,\tau)\ \ (l = 0,\ \ldots\ p-1).$$

Wegen Bedingung (V) gelten also:

$$u_{x^l}(x,t)/^{x=0} = u_{x^l}(x,t)/^{x=1} = 0\ \ (l = 0,\ \ldots\ p-1).$$

Daß für $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$

$$u_{t^k x^i}(x,t) = u_{x^i t^k}(x,t)\ \ (i = 0,\ \ldots\ 2p-1;\ k = 0,\ \ldots\ q-1)$$
$$u_{t^q x^i}(x,t) = u_{x^i t^q}(x,t)\ \ (i = 0,\ \ldots\ 2p)$$

gelten, folgt unmittelbar durch Vergleich der vorhin für

$$u_{t^k x^i}\ (i = 0,\ \ldots\ 2p-1;\ k = 0,\ \ldots\ q-1),\ u_{t^q x^i}\ (i = 0,\ \ldots\ 2p)$$

abgeleiteten Formeln mit den folgenden Formeln unter Berücksichtigung von Bedingung (I) für V.

Es gelten nämlich für $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$

$$u_{x^i t^k}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi v_{x^i t^k}(x,t;\,\xi,\tau) f(\xi,\tau)$$
$$\text{für } i = 0,\ \ldots\ 2p-1;\ k = 0,\ \ldots\ q-1.$$

$$u_{x^i t^q}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi v_{x^i t^q}(x,t;\,\xi,\tau) f(\xi,\tau)$$
$$+ \int_0^1 d\xi v_{x^i t^{q-1}}(x,t;\xi,\tau)/^{\tau=t} f(\xi,t)$$

$$u_{x^{2p} t^q}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi v_{x^{2p} t^q}(x,t;\,\xi,\tau) f(\xi,\tau)$$
$$+ \int_0^t d\tau v_{x^{2p-1} t^q}(x,t;\,\xi,\tau)/^{\xi = x-0}_{\xi = x+0} \cdot f(x,\tau)$$
$$+ \int_0^1 d\xi v_{x^{2p} t^{q-1}}(x,t;\xi,\tau)/^{\tau=t} f(\xi,t)$$
$$+ v_{x^{2p-1} t^{q-1}}(x,t;\xi,\tau)/^{\tau=t}/^{\xi = x-0}_{\xi = x+0} \cdot f(x,t)$$

Nun ist:

$$L[u] \equiv \sum_{i=0}^{2p} a_{i,q}(x,t) u_{x^i t^q}(x,t) + \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t) u_{x^i t^k}(x,t)$$

$$= \sum_{i=0}^{2p} a_{i,q}(x,t) u_{t^q x^i}(x,t) + \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t) u_{t^k x^i}(x,t)$$

Die zweite Zeile in dieser Formel ist aber nach (I) bis (IV) gleich $f(x,t)$. Somit ist das Problem (A) darauf zurückgeführt, eine Grundlösung $v(x,t;\xi,\tau)$ mit den Eigenschaften (I) bis (V) zu konstruieren.

§ 3. Auflösung einer Integrodifferentialgleichung, welcher die Grundlösung $v(x,t;\xi,\tau)$ genügt.

Wir nehmen an: $V(x,t) = v(x,t\ \xi,\tau)$ sei eine Funktion mit den für die Grundlösung verlangten Eigenschaften.

Nach Bedingung (III) des § 2 ist für $x \neq \xi$ in R:

$$\sum_{i=0}^{2p} a_{i,q}(x,t) V_{t^q x^i}(x,t) + \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t) V_{t^k x^i}(x,t) = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

Wir schreiben hier y statt x und multiplizieren (2) mit $K(y,x;t)$ und integrieren über y von 0 bis 1; dabei ist $K(y,x;t)$ die Green'sche Funktion der Differentialgleichung $\sum_{i=o}^{2p} (-1)^i [a_{i,q}(y,t) W(y)]_{y^i} = 0$ mit den Randbedingungen

$$\frac{d^l W}{dy^l}\Big|^{y=0} = \frac{d^l W}{dy^l}\Big|^{y=1} = 0 \quad (l = 0, \ldots p-1).$$

Ihre Existenz steht wegen der über $a_{i,q}(y,t)$ gemachten Voraussetzungen fest. (Siehe Anhang Hilfssatz 1, 2 und 3 mit Folgerungen). Wir erhalten

$$\int_0^1 K(y,x;t) \sum_{i=0}^{2p} a_{i,q}(y,t) V_{t^q y^i}(y,t) dy$$

$$+ \int_0^1 K(y,x;t) \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t) V_{t^k y^i}(y,t) dy = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

Wenden wir in dem ersten Integral partielle Integration an, so bekommen wir unter Berücksichtigung von Bedingung (IV), daß $V_{t^q y^{2p-1}}(y,t)$ in $y = \xi$ keinen Sprung macht, folgende Formel

$$\left\{\sum_{i=0}^{2p}\sum_{l=1}^{i}(-1)^{l-1}[a_{i,q}(y,t)K(y,x;t)]_{y^{l-1}}\cdot V_{t^q y^{i-l}}\right\}\Big/{}^{y=1}_{y=0}$$

$$+(-1)^{2p-1}[a_{2p,q}(y,t)K(y,x;t)]_{y^{2p-1}}\Big/{}^{y=x-0}_{y=x+0}\cdot V_{t^q}(x,t)$$

$$+\int_0^1\sum_{i=0}^{2p}(-1)^i[a_{i,q}(y,t)K(y,x;t)]_{y^i}\cdot V_{t^q}(y,t)dy$$

$$+\int_0^1 K(y,x;t)\sum_{i=0}^{2p-1}\sum_{k=0}^{q-1}a_{i,k}(y,t)V_{t^k y^i}(y,t)dy=0 \quad \ldots \quad (4)$$

Wegen Bedingung (V) und den Eigenschaften der Green'schen Funktion $K(y,x;t)$ folgt:

$$V_{t^q}(x,t)+\int_0^1 K(y,x;t)\sum_{i=0}^{2p-1}\sum_{k=0}^{q-1}a_{i,k}(y,t)V_{t^k y^i}(y,t)dy=0 \quad \ldots \quad (5)$$

Integrieren wir (5) q-mal nach t, so wird

$$\int_\tau^t dt_1\int_\tau^{t_1}dt_2\ldots\int_\tau^{t_{q-1}}dt_q V_{t_q^q}(x,t_q)+\int_\tau^t dt_1\ldots\int_\tau^{t_{q-1}}dt_q\int_0^1 dy K(y,x;t_q)\sum_{i=0}^{2p-1}\sum_{k=0}^{q-1}a_{i,k}(y,t_q)V_{{}^{k\ i}_{t^q y}}(y,t_q)$$
$$=0 \quad \ldots \quad (6)$$

dabei ist $V(x,t)=v(x,t;\xi,\tau)$.

Unter Berücksichtigung der Bedingung $(\mathrm{II})^a$ und $(\mathrm{II})^b$ für V und der bekannten Dreiecksumformungsformel

$$\int_\tau^t dt_1\int_\tau^{t_{q-1}}dt_q M(t_q)=\int_\tau^t dt_q\int_{t_q}^t dt_{q-1}\ldots\int_{t_2}^t dt_1 M(t_q)=\int_\tau^t dt_q\frac{(t-t_q)^{q-1}}{(q-1)!}M(t_q)$$
$$=\int_\tau^t dt'\frac{(t-t')^{q-1}}{(q-1)!}M(t') \quad \ldots \quad (7)$$

erhalten wir

$$V(x,t)-\frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!}G(x,\xi;\tau)$$
$$+\int_0^1 dy\int_\tau^t dt'\frac{(t-t')^{q-1}}{(q-1)!}K(y,x;t')\sum_{i=0}^{2p-1}\sum_{k=0}^{q-1}a_{i,k}(y,t')V_{t^k y^i}(y,t')=0 \quad \ldots \quad (8)$$

Das ist eine Integrodifferentialgleichung, der $V(x,t)$ genügen muß, falls sie eine Grundlösung ist. Wir gehen nun zur Lösung dieser Integrodiffentialgleichung über und werden im nächsten Paragraphen zeigen, daß ihre Lösung alle Eigenschaften der Grundlösung hat.

Die Lösung von (8) erfolgt durch sukzessive Approximation. Wir setzen an:

$$V^{(0)}(x,t)=\frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!}G(x,\xi;\tau),$$

$$V^{(n+1)}(x,t) - \frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!} G(x,\xi;\tau)$$
$$+ \int_0^1 dy \int_\tau^t dt' \frac{(t-t')^{q-1}}{(q-1)!} K(y,x;t') \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{i=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') V^{(n)}{}_{t'^k y^i}(y,t') = 0$$
$$\text{für } n = 0, 1, \ldots; \ \ldots \quad (9)$$

$V^{(n)}(x,t)$ hängt selbstverständlich noch von ξ, τ ab, es ist als eine Funktion von 4 Veränderlichen x, t; ξ, τ anzusehen. $V^{(0)}{}_{t^k x^i}(x,t)$ $(k = 0, \ldots q-1;\ i = 0, \ldots 2p-2)$ sind in R stetig, während $V^{(0)}{}_{t^k x^{2p-1}}(x,t)$ $(k = 0, \ldots q-1)$ nur in R^- und in R^+ stetig sind, wodurch sie also für $x = \xi$ eventuell Sprünge erleiden dürften. Diese Stetigkeitseigenschaften von $V^{(0)}(x,t)$ nennen wir E. Damit die rekursive Definition von $V^{(n+1)}(x,t)$ möglich ist, genügt es zu zeigen, daß $V^{(n)}(x,t)$ die Eigenschaft E hat. Wir zeigen das durch vollständige Induktion. Hätte $V^{(n)}(x,t)$ bereits diese Eigenschaft E, so würde $V^{(n+1)}(x,t)$ ebenfalls diese Eigenschaft haben, falls wir zeigen könnten, daß

$$M(x,t) = \int_0^1 dy \int_\tau^t dt' \frac{(t-t')^{q-1}}{(q-1)!} K(y,x;t') \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') V^{(n)}{}_{t'^k y^i}(y,t')$$

die Eigenschaft E hat.

Nun ist

$$M_{t^k}(x,t) = \int_0^1 dy \int_\tau^t dt' \frac{(t-t')^{q-k-1}}{(q-k-1)!} K(y,x;t') \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') V^{(n)}{}_{t'^k y^i}(y,t')$$
$$\text{für } k = 0, \ \ldots \ q-1.$$

$M_{t^k}(x,t)$, besser gesagt $M_{t^k}(x,t;\xi,\tau)$ $(k = 0, \ldots q-1)$ sind also danach alle durch $K(y,x;t)$ quellenmäßig darstellbar, $M(x,t)$ hat folglich nicht nur die Eigenschaft E, sondern die $2p-1$-ten Ableitungen nach x von M_{t^k} sind sogar in R stetig (siehe Anhang Hilfssatz 4). Bilden wir nun nach (9) die $V^{(n)}{}_{t^j x^l}$ $(j = 0, \ldots q-1;\ l = 0, \ldots 2p-1)$, bekommen wir (siehe Anhang Hilfssatz 4) in R^- und in R^+:

$$V^{(n+1)}_{t^j x^l}(x,t) - \frac{(t-\tau)^{q-j-1}}{(q-j-1)!} G_{x^l}(x,\xi;\tau)$$
$$+ \int_0^1 dy \int_\tau^t dt' \frac{(t-t')^{q-j-1}}{(q-j-1)!} K_{x^l}(y,x;t') \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') V^{(n)}{}_{t'^k y^i}(y,t') = 0$$
$$\text{für } j = 0, \ \ldots \ q-1;\ l = 0, \ \ldots \ 2p-1;\ n = 0,1 \ \ldots \quad (10)$$

Hieraus folgt:

$$V^{(n+1)}{}_{t^j x^l}(x,t) - V^{(n)}{}_{t^j x^l}(x,t)$$
$$+ \int_0^1 dy \int_\tau^t dt' \frac{(t-t')^{q-j-1}}{(q-j-1)!} K_{x^l}(y,x;t') \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') \Big[V^{(n)}{}_{t'^k y^i}(y,t') - V^{(n-1)}{}_{t'^k y^i}(y,t') \Big] = 0$$

für $n = 1 \ldots$; $j = 0, \ldots q-1$; $l = 0, \ldots 2p-1$ in R^- und in R^+

Sei nun C eine positive Zahl, für die

$$\left| \frac{(t-t')^{q-j-1}}{(q-j-1)!} K_{x^l}(y,x;t') a_{i,k}(y,t') \right| \leqq C \quad \text{gilt}$$

für $k,j = 0, \ldots q-1$; $i,l = 0, \ldots 2p-1$; $0 \leqq x, y \leqq 1$; $0 \leqq t, t' \leqq T$

Aus (11) folgt dann:

$$\left| V^{(n+1)}{}_{t^j x^l}(x,t) - V^{(n)}{}_{t^j x^l}(x,t) \right|$$
$$\leqq C \cdot \left| \int_\tau^t dt' \int_0^1 dy \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} \left| V^{(n)}{}_{t'^k y^i}(y,t') - V^{(n-1)}{}_{t'^k y^i}(y,t') \right| \right|$$
$$n = 1, \ldots; j = 0, \ldots q-1; \; l = 0, \ldots 2p-1.$$

Summieren wir diese Ungleichungen über j von 0 bis $q-1$, über l von 0 bis $2p-1$ und setzen wir zur Abkürzung in R^- und in R^+:

$$D_n(x,t) = \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} \left| V^{(n+1)}{}_{t^k x^i}(x,t) - V^{(n)}{}_{t^k x^i}(x,t) \right|$$

so erhalten wir:

$$D_n(x,t) \leqq q \cdot 2p \cdot C \left| \int_0^1 dy \int_\tau^t dt' D_{n-1}(y,t') \right|$$
$$\text{für } n = 1,2 \ldots, \text{ in } R^- \text{ und in } R^+. \quad \ldots (12)$$

Nun sei C' so bestimmt, daß in R^- und in R^+: $|D_0(x,t)| < C'$ wird, das ist möglich, da die $|V^{(0)}{}_{t^k x^i}(x,t)|$ $(i = 0, \ldots 2p-1; \; k = 0, \ldots q-1)$ in R^- und in R^+ beschränkt sind.

Dann folgt aus (12)

$$D^n(x,t) \leqq \frac{(q \cdot 2p \cdot C)^n C' |t-\tau|^n}{n!}$$

Hieraus folgt nach Definition von $D^n(x,t)$ die gleichmäßige Konvergenz der Folgen $V^{(n)}{}_{t^k x^i}(x,t)$ für $i = 0, \ldots 2p-1$; $k = 0, \ldots q-1$ in R^- und in R^+.

Es gibt daher eine Funktion $V(x,t)$, für die folgende Limesgleichungen (im Sinne gleichmäßiger Konvergenz) gelten:
in R^- und in R

$$V^{(n)}{}_{t^k x^i}(x,t) \Longrightarrow V_{t^k x^i}(x,t)$$

für $n \to \infty$; $k = 0, \ldots q-1$; $i = 0, \ldots 2p-1$.

Wegen der Eigenschaft E, die alle $V^{(n)}$ besitzen, sind dann $V_{t^k x^i}(x,t)$ $(i = 0, \ldots 2p-2;\ k = 0, \ldots q-1)$ sogar in R stetig, während $V_{t^k x^{2p-1}}(x,t)$ $(k = 0, \ldots q-1)$ nur in R^- und in R^+ stetig sind. $V(x,t)$ hat also auch die Eigenschaft E. In dieser Aussage ist die stetige Abhängigkeit der $V_{t^k x^i}(x,t)$ $(i = 0, \ldots 2p-1;\ k = 0, \ldots q-1)$ von ξ, τ in dem durch E festgelegten Sinn enthalten.

Lassen wir nun in (9) $n \to \infty$ streben, so folgt daraus, daß $V(x,t)$ der Integrodifferentialgleichung (8) genügt. $V(x,t)$ ist aber die einzige Lösung von (8) mit der Eigenschaft E. Denn, gäbe es noch eine weitere Lösung $U(x,t)$ mit der Eigenschaft E, so würde die Differenz $W(x,t) = U(x,t) - V(x,t)$ ebenfalls die Eigenschaft E besitzen und der folgenden Integrodifferentialgleichung genügen:

$$W(x\,t) + \int_0^1 dy \int_\tau^t dt' \frac{(t-t')^{q-1}}{(q-1)!} \cdot K(y,x;t') \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') W_{t^k y^i}(y,t') = 0 \qquad \ldots (13)$$

Bezeichnen wir nun

$$D^*(x,t) = \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} |W_{t^k x^i}(x,t)|,$$

so ist $D^*(x,t)$ wegen der Eigenschaft E von $W(x,t)$ in dem Bereich $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$ beschränkt, etwa kleiner als C^*. Dann folgt aus (13) in derselben Weise wie früher für D_n jetzt:

$$D^*(x,t) \leqq \frac{(q \cdot 2p \cdot C)^n C^* |t-\tau|^n}{n!} \qquad \ldots (14)$$

Die rechte Seite von (14) strebt für $n \to \infty$ und $0 \leqq t, \tau \leqq T$ gegen Null, also:

$$D^*(x,t) = 0$$

insbesondere: $W(x,t) = U(x,t) - V(x,t) = 0$ für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$, womit die Eindeutigkeit bewiesen ist.

Hieraus folgt, da die Grundlösung wegen Bedingung (I) die Eigenschaft E besitzt und (8) genügt, daß die Grundlösung, falls sie überhaupt existiert, eindeutig bestimmt ist.

§ 4. Existenz der Grundlösung.

Wir haben im vorigen Paragraphen gezeigt, daß die Integrodifferentialgleichung (8) lösbar ist, und daß die Lösung die Eigenschaft E besitzt.

$$V(x,t) - \frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!} G(x,\xi;\tau)$$
$$+ \int_0^1 dy \int_\tau^t dt' \frac{(t-t')^{q-1}}{(q-1)!} K(y,x;t') \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') V_{t'^k y^i}(y,t') = 0$$
$$\text{in } R^- \text{ und in } R^+ \ \ldots \ (8).$$

Wir werden von der Lösung $V(x,t)$, die selbstverständlich noch von ξ und τ abhängen, zeigen, daß sie alle Eigenschaften der Grundlösung hat.

Differenzieren wir (8) j-mal nach t, so bekommen wir

$$V_{t^j}(x,t) - \frac{(t-\tau)^{q-j-1}}{(q-j-1)!} G(x,\xi;\tau)$$
$$+ \int_0^1 dy \int_\tau^t dt' \frac{(t-t')^{q-j-1}}{(q-j-1)!} K(y,x;t') \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') V_{t'^k y^i}(y,t') = 0$$
$$\text{in } R^- \text{ und in } R^+ \text{ für } j = 0, \ldots q-1. \quad \ldots \ (15).$$

$$V_{t^q}(x,t) + \int_0^1 dy K(y,x;t) \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t) V_{t^k y^i}(y,t) = 0$$
$$\text{in } R^- \text{ und in } R^+. \quad \ldots \ (16)$$

Aus (15) sieht man unmittelbar, daß die Bedingung $(\mathrm{II})^a$ und $(\mathrm{II})^b$ für die Grundlösung erfüllt ist:

$$V_{t^j}(x,t)/^{t=\tau} = 0 \quad \text{für } j = 0, \ldots q-2$$
$$V_{t^{q-1}}(x,t)/^{t=\tau} = G(x,\xi;\tau).$$

Die Bedingung (IV) ist wegen (16) erfüllt, da ja nach (16) $V_{t^q}(x,t)$ durch $K(y,x;t)$ quellenmäßig dargestellt ist, so daß $V_{t^q x^{2p-1}}(x,t)$ nach Hilfssatz 4 im Anhang für $x = \xi$ keinen Sprung macht. Aus (16) folgen ferner durch Differentiation nach x in R^- und in R^+:

$$V_{t^q x^l}(x,t) + \int_0^1 dy K_{x^l}(y,x;t) \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t) V_{t^k y^i}(y,t) = 0$$
$$\text{für } l = 0, \ldots 2p-1.$$

$$V_{t^q x^{2p}}(x,t) + \int_0^1 dy K_{x^{2p}}(y, x; t) \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t) V_{t^k y^i}(y,t)$$

$$+ K_{x^{2p-1}}(y, x; t)\Big|_{y=x+0}^{y=x-0} \cdot \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t) V_{t^k x^i}(x,t) = 0 \quad \ldots \quad (17)$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (17) mit ihren entsprechenden $a_{l,q}(x,t)$ $(l = 0, \ldots 2p)$ und addieren sie, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Tatsache, daß nach Anhang Hilfssatz 3

$$\sum_{l=0}^{2p} a_{l,q}(x,t) K_{x^l}(y, x; t) = 0$$

$$K_{x^{2p-1}}(y, x; t)\Big|_{y=x+0}^{y=x-0} = K_{x^{2p-1}}(y, x; t)\Big|_{x=y+0}^{x=y-0} = 1$$

gilt, die Gleichung:

$$\sum_{l=0}^{2p} a_{l,q}(x,t) V_{t^q x^l}(x,t) + \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t) V_{t^k x^i}(x,t) = 0$$

in R^- und in R^+.

Das ist aber gerade die Bedingung (III) für die Grundlösung.

Aus (8) folgt durch Differentiationen nach x:

$$V_{x^l}(x,t) - \frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!} G_{x^l}(x, \xi; \tau)$$

$$+ \int_0^1 dy \int_\tau^t dt' \frac{(t-t')^{q-1}}{(q-1)!} K_{x^l}(y, x; t) \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') V_{t^k y^i}(y,t') = 0$$

in R^- und in R^+, für $l = 0, \ldots 2p-1$. $\ldots$ (18)

Da aber nach Anhang Hilfssatz 3:

$$K_{x^l}(y, x; t)\big|^{x=0} = K_{x^l}(y, x; t)\big|^{x=1} = 0 \quad (l = 0, \ldots p-1)$$

$$G_{x^l}(x, \xi; \tau)\big|^{x=0} = G_{x^l}(x, \xi; \tau)\big|^{x=1} = 0 \quad (l = 0, \ldots p-1)$$

gilt, folgt aus (18) für $l = 0, \ldots p-1$ die Bedingung (V) für die Grundlösung:

$$V_{x^l}(x,t)\big|^{x=0} = V_{x^l}(x,t)\big|^{x=1} = 0 \text{ für } l = 0, \ldots p-1.$$

Die Bedingung (I) für die Grunglösung ist wegen der schon im vorigen Paragraphen bewiesenen Eigenschaft E für $V(x,t)$ bis auf die Vertauschungsrelationen der Differentiationen nach x und nach t erfüllt.

Zunächst folgen aus (15) durch Differentiationen nach x, aus (18) durch Differentiationen nach t folgende Formeln:

$$V_{t^j x^l}(x,t) - \frac{(t-\tau)^{q-j-1}}{(q-j-1)!} G_{x^l}(x,\xi;\tau) + \int_0^1 dy \int_\tau^t dt' \frac{(t-t')^{q-j-1}}{(q-j-1)!}$$
$$\times K_{x^l}(y,x;t') \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') V_{t'^k y^i}(y,t') = 0$$

in R^- und in R^+ für $j = 0, \ldots q-1$; $l = 0, \ldots 2p-1$. ... (19)

$$V_{x^l t^j}(x,t) - \frac{(t-\tau)^{q-j-1}}{(q-j-1)!} G_{x^l}(x,\xi;\tau) + \int_0^1 dy \int_\tau^t dt' \frac{(t-t')^{q-j-1}}{(q-j-1)!}$$
$$\times K_{x^l}(y,x;t') \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') V_{t'^k y^i}(y,t') = 0$$

in R^- und in R^+ für $j = 0, \ldots q-1$; $l = 0, \ldots 2p-1$. ... (20)

Durch Vergleich von (19) und (20) ersieht man sofort

$$V_{t^j x^l}(x,t) = V_{x^l t^j}(x,t)$$

in R^- und in R^+ für $j = 0, \ldots q-1$; $l = 0, \ldots 2p-1$.

Ferner ist nach (20) durch Diffenentiation nach t

$$V_{x^l t^q}(x,t) + \int_0^1 dy K_{x^l}(y,x;t) \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t) V_{t^k y^i}(y,t) = 0$$

in R^- und in R^+, für $l = 0, \ldots 2p-1$. ... (21)

Aus (18) folgt ferner durch Differentiation nach x wegen $K_{x^{2p-1}}(y,x;t')\Big|_{y=x+0}^{y=x-0} = 1$:

$$V_{x^{2p}}(x,t) - \frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!} G_{x^{2p}}(x,\xi;\tau) + \int_0^1 dy \int_\tau^t dt' \frac{(t-t')^{q-1}}{(q-1)!}$$
$$\times K_{x^{2p}}(y,x;t') \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') V_{t'^k y^i}(y,t')$$
$$+ \int_\tau^t dt' \frac{(t-t')^{q-1}}{(q-1)!} \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t') V_{t'^k x^i}(x,t) = 0$$

in R^- und in R^+. ... (22)

Differenzieren wir (22) q-mal nach t, so bekommen wir:

$$V_{x^{2p} t^q}(x,t) + \int_0^1 dy K_{x^{2p}}(y,x;t) \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t) V_{t^k y^i}(y,t)$$
$$+ \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t) V_{t^k x^i}(x,t) = 0$$

in R^- und in R^+. ... (23)

Durch Vergleich von (22), (23) mit (17) bekommen wir die restlichen Vertauschungsrelationen:

$$V_{x^l t^q}(x,t) = V_{t^q x^l}(x,t)$$
in R^- und R^+ für $l = 0, \ldots 2p$.

Somit sind für unsere Lösung $V(x,t)$ von (8) alle Bedingungen (I) bis (V) der Grundlösung erfüllt.

§ 5. Direkter Existenzbeweis und Eindeutigkeit.

Wir haben in den vorigen Paragraphen durch Konstruktion der Grundlösung $v(x,t;\xi,\tau)$ in $u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 d\xi v(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)$ eine Funktion gefunden, die unser Problem (A) löst. Wenn wir nun mit der Existenz einer Lösung des Problems (A) uns begnügen wollen und dabei auf die explizite Darstellung der Lösung verzichten, so können wir viel schneller beim direkten Übergang von (A) zur Integralgleichung zum Ziele kommen.

Sei nun $u(x,t)$ eine Lösung des Problems (A), so können wir in derselben Weise wie früher für $v(x,t;\xi,\tau)$ hier schließen, daß $u(x,t)$ der folgenden Integrodifferentialgleichung genügen muß:

$$u(x,t) + \int_0^1 dy \int_0^t dt' \frac{(t-t')^{q-1}}{(q-1)!} K(y,x;t') \left\{ \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') u_{t^k y^i}(y,t') - f(y,t') \right\} = 0$$
für $0 \leqq x \leqq 1;\ 0 \leqq t \leqq T \quad \ldots \quad (24)$

Wir wollen jetzt umgekehrt (24) auflösen und werden von ihrer Lösung zeigen, daß sie zugleich das Problem (A) löst. Die Auflösung von (24) erfolgt auch hier durch sukzessive Approximation.

Wir setzen an: $u^{(0)}(x,t) = 0$

$$u^{(n+1)}(x,t) + \int_0^1 dy \int_0^t dt' \frac{(t-t')^{q-1}}{(q-1)!} K(y,x;t') \times \left\{ \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') u^{(n)}_{t^k y^i}(y,t') - f(y,t') \right\} = 0$$
für $n = 0, 1, 2, \ldots;\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T \quad \ldots \quad (25)$

Da $u^{(n+1)}(x,t)$ durch $K(y,x;t')$ quellenmäßig dargestellt ist, ist die rekursive Definition von $u^{(n)}(x,y)$ $(n = 0,1, \ldots)$ möglich, und es gelten in dem Bereich $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$:

$$u^{(n)}_{t^k x^i}(x,t) = u^{(n)}_{x^i t^k}(x,t) \quad i = 0, \ldots 2p-1;\ k = 0, \ldots q-1)$$

für alle ganzen, positiven n.

Aus (25) folgt durch Bildung der Differenz $u^{(n+1)} - u^{(n)}$:

$$u^{(n+1)}(x,t) - u^{(n)}(x,t) + \int_0^1 dy \int_0^t dt' \frac{(t-t')^{q-1}}{(q-1)!} K(y,x;t') \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t')$$
$$[u^{(n)}{}_{t'^k y^i} - u^{(n-1)}{}_{t'^k y^i}(y,t')] = 0$$

für $n = 1,2, \ldots; \ 0 \leqq x \leqq 1, \ 0 \leqq t \leqq T \quad \ldots (26)$

Durch Differentiationen bekommt man aus (26) weiter:

$$u^{(n+1)}{}_{t^j x^l}(x,t) - u^{(n)}{}_{t^j x^l}(x,t + \int_0^1 dy \int_0^t dt' \frac{(t-t')^{q-j-1}}{(q-j-1)!} K_{x^l}(y,x;t)$$
$$\times \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t')[u^{(n)}{}_{t'^k y^i}(y,t') - u^{(n-1)}{}_{t'^k y^i}(y,t')] = 0$$

für $n = 1,2, \ldots; \ l = 0, \ldots 2p-1; \ j = 0, \ldots q-1; \ 0 \leqq x \leqq 1, \ 0 \leqq t \leqq T$
$\ldots (27)$

C sei eine positive Konstante, für die

$$\left| \frac{(t-t')^{q-j-1}}{(q-j-1)!} K_{x^l}(y,x;t') a_{i,k}(y,t') \right| \leqq C$$

für $j,k = 0, \ldots q-1; \ l,i = 0, \ldots 2p-1; \ 0 \leqq x,y \leqq 1, \ 0 \leqq t,t' \leqq T$ gelten.

Dann folgt aus (27):

$$| u^{(n+1)}{}_{t^j x^l}(x,t) - u^{(n)}{}_{t^j x^l}(x,t) | \leqq C \int_0^1 dy \int_0^t dt' \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1}$$
$$| u^{(n)}{}_{t'^k y^i}(y,t') - u^{(n-1)}{}_{t'^k y^i}(y,t') |$$

für $j = 0, \ldots q-1; \ l = 0, \ldots 2p-1; \ 0 \leqq x \leqq 1, \ 0 \leqq t \leqq T$
$\ldots (28)$

Summieren wir (28) über j von 0 bis $q-1$, über l von 0 bis $2p-1$, so erhalten wir, indem wir zur Abkürzung

$$\vartheta_n(x,t) = \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} | u^{(n+1)}{}_{t^k x^i}(x,t) - u^{(n)}{}_{t^k x^i}(x,t) |$$
$$n = 0,1, \ldots 0 \leqq x \leqq 1, \ 0 \leqq t \leqq T$$

setzen, die folgende Ungleichung:

$$\vartheta_n(x,t) \leqq q \cdot 2p \cdot C \left| \int_0^1 dy \int_0^t dt' \vartheta_{n-1}(y,t') \right|$$

für $n = 1,2, \ldots; \ 0 \leqq x \leqq 1, \ 0 \leqq t \leqq T \quad \ldots (29)$

Sei nun Γ so bestimmt, daß

$$|\vartheta_0(x,t)| \leqq \Gamma \qquad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1; \ 0 \leqq t \leqq T$$

ist, dann folgt aus (29):

$$\vartheta_n(x,t) \leqq \frac{(q \cdot 2p \cdot C)^n \Gamma \cdot T^n}{n!} \quad (0 \leqq x \leqq 1) \quad \ldots \quad (30)$$

Hieraus folgt, daß die Folgen $u^{(n)}{}_{t^j x^l}(x,t) = u^{(n)}{}_{x^l t^j}(x,t)$ $(j = 0, \ldots q-1;$ $l = 0, \ldots 2p-1)$ in dem Bereich $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$ gleichmäßig konvergent sind; es existiert eine Funktion $u(x,t)$ und es gelten im Sinne gleichmäßiger Konvergenz folgende Limesgleichungen:

$$\lim_{n \to \infty} u^{(n)}{}_{t^k x^i}(x,t) = u_{t^k x^i}(x,t)$$

für $i = 0, \ldots 2p-1;\ k = 0, \ldots q-1;\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T.$

$u_{t^k x^i}(x,t)$ sind in $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$ stetig und es gelten: $u_{t^k x^i}(x,t) = u_{x^i t^k}(x,t)$ für $i = 0, \ldots 2p-1;\ k = 0, \ldots q-1.$

Aus (25) folgt durch Grenzübergang, daß $u(x,t)$ der Integrodifferentialgleichung (24) genügt:

$$u(x,t) + \int_0^1 dy \int_0^t dt' \frac{(t-t')^{q-1}}{(q-1)!} K(y,x;t')$$
$$\times \left\{ \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t') u_{t'^k y^i}(y,t') - f(y,t') \right\} = 0$$
$$\text{für } 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T \quad \ldots \quad (24)$$

Die Lösung von (24) ist aber auch eindeutig, denn gäbe es zwei Lösungen von (24) $u(x,t)$ und $v(x,t)$, so kann man für die Differenz $u(x,t) - v(x,t)$ eine (34) entsprechende Ungleichung herleiten:

$$\sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} | u_{t^k x^i}(x,t) - v_{t^k x^i}(x,t) | \leqq \frac{(q \cdot 2p \cdot C)^n \bar{\Gamma} \cdot T^n}{n!}$$

im Bereich: $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$, woraus insbesondere $u(x,t) = v(x,t)$ für $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$ folgt. Damit ist aber auch die Eindeutigkeit der Lösung des Problems (A) gezeigt, da ja jede Lösung von (A) zwangsläufig (24) genügt.

Aus (24) sieht man zunächst:

$$u_{t^j}(x,t)\,/^{t=0} = 0$$

für $j = 0, \ldots q-1$, und wegen $K_{x^l}(y,x;t')\,/^{x=0} = K_{x^l}(y,x;t')\,/^{x=1} = 0$ $(l = 0, \ldots p-1)$:

$$u_{x^l}(x,t)\,/^{x=0} = u_{x^l}(x,t)\,/^{x=1} = 0 \quad (l = 0, \ldots p-1)$$

Ferner folgen aus (24) durch Differentiationen:

$$u_{t^q x^l}(x,t) + \int_0^1 dy K_{x^l}(y,x;t) \left\{ \sum_{i=0}^{2p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t) u_{t^k y^i}(y,t) - f(y,t) \right\} = 0$$
$$\text{in } 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T,\ l = 0, \ldots 2p-1. \quad \ldots \quad (31)$$

$$u_{x^l t^q}(x,t) + \int_0^1 dy K_{x^l}(y,x;t)\left\{\sum_{i=0}^{2p-1}\sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t)u_{t^k y^i}(y,t) - f(y,t)\right\} = 0$$
$$\text{in } 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T,\ l = 0, \ldots 2p-1. \quad \ldots (31)^*$$

$$u_{t^q x^{2p}}(x,t) + \int_0^1 dy K_{x^{2p}}(y,x;t)\left\{\sum_{i=0}^{2p-1}\sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t)u_{t^k y^i}(y,t) - f(y,t)\right\}$$
$$+ \sum_{i=0}^{2p-1}\sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t)u_{t^k x^i}(x,t) - f(x,t) = 0$$
$$\text{in } 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T \quad \ldots (32)$$

$$u_{x^{2p} t^q}(x,t) + \int_0^1 dy K_{x^{2p}}(y,x;t)\left\{\sum_{i=0}^{2p-1}\sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(y,t)u_{t^k y^i}(y,t) - f(y,t)\right\}$$
$$+ \sum_{i=0}^{2p-1}\sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t)u_{t^k x^i}(x,t) - f(x,t) = 0$$
$$\text{in } 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T \quad \ldots (32)^*$$

Hieraus folgen durch Vergleich von (31) mit (31)*, von (32) mit (32)*:

$$u_{t^q x^l}(x,t) = u_{x^l t^q}(x,t) \ (l = 0, \ldots 2p;\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T)$$

Wir multiplizieren die Gleichungen (31)* und (32)* mit den entsprechenden $a_{l,q}(x,t)$ und summieren sie über l von 0 bis $2p$, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Tatsache, daß:

$$\sum_{l=0}^{2p} a_{l,q}(x,t)K_{x^l}(y,x;t) = 0$$

und

$$u_{t^j x^l}(x,t) = u_{x^l t^j}(x,t) \ (l = 0, \ldots 2p-1;\ j = 0, \ldots q-1)$$
$$\text{in } 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$$

gelten, die Differentialgleichung:

$$\sum_{l=0}^{2p} a_{l,q}(x,t)u_{x^l t^q}(x,t) + \sum_{i=0}^{2p-1}\sum_{k=0}^{q-1} a_{i,k}(x,t)u_{x^i t^k}(x,t) = f(x,t) \quad \ldots (1)$$

Somit haben wir gezeigt, daß unsere Lösung $u(x,t)$ von (24) zugleich das Problem (A) löst.

§ 6. Verallgemeinerung auf Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen.

Die Methode in den vorigen Paragraphen, insbesondere die von § 5 läßt sich auch im Falle von Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen anwenden. Der Einfachheit halber beschäftigen wir uns mit dem folgenden Problem:

Es wird eine Funktion $u(x, y, t)$ gesucht, die der Differentialgleichung

$$u_{txx} + u_{tyy} - a(x, y, t) \cdot u = f(x, y, t)$$

genügt und für die gilt:

$$u(x, y, o) = \omega(x, y) \text{ für } x^2 + y^2 \leq 1$$
$$u(x, y, t) = \varphi(\vartheta, t) \text{ für } x^2 + y^2 = 1$$

(ϑ bedeutet den Polarwinkel des Punktes (x, y) von der positiven x-Achse aus gerechnet), wo $\omega(x, y)$, $\varphi(\vartheta, t)$ mit $\omega(x, y) = \varphi(\vartheta, o)$ für $x^2 + y^2 = 1$ und mit $\varphi(o, t) = \varphi(2\pi, t)$ willkürlich vorgegebene Funktionen sind. Dabei wird vorausgesetzt: $\varphi(\vartheta, t)$ stetig differenzierbar für $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq T\,(T > 0)$; $\omega(x, y)$ für $x^2 + y^2 \leq 1$ nach x und y zweimal stetig differenzierbar. $f(x, y, t)$ stetig in $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq t \leq T$, stetig differenzierbar in $x^2 + y^2 < 1$, $0 \leq t \leq T$. Es wird verlangt: $u(x, y, t)$ stetig in $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq t \leq T$. u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{txx}, u_{tyy}, stetig für $x^2 + y^2 < 1$, $0 \leq t \leq T$.

Man kann auch hier das Problem mit inhomogenen Randbedingungen auf ein Problem mit verschwindenden Randwerten zurückführen.

$\varrho(x, y, t)$ sei das Poisson'sche Integral der Potentialtheorie mit $\varphi(\vartheta, t)$ als Randwert. $\varrho_t(x, y, t)$ ist wegen der Stetigdifferenzierbarkeit von $\varphi(\vartheta, t)$ ebenfalls eine Potentialfunktion und außerdem für $0 \leq t \leq T$ stetig. Die Funktion

$$r(x, y, t) = \omega(x, y) - \varrho(x, y, o) + \varrho(x, y, t)$$

erfüllt nun alle Randbedingungen, die an $u(x, y, t)$ gestellt sind. Denn es ist:

$$r(x, y, o) = \omega(x, y) - \varrho(x, y, o) + \varrho(x, y, o) = \omega(x, y) \text{ für } x^2 + y^2 \leq 1$$
$$r(x, y, t) = \omega(x, y) - \varphi(\vartheta, o) + \varphi(\vartheta, t) = \varphi(\vartheta, t) \text{ für } x^2 + y^2 = 1$$

$r(x, y, t)$ besitzt ferner die von $u(x, y, t)$ verlangten Stetigkeitseigenschaften.

Sei nun $u(x, y, t)$ eine Lösung unseres ursprünglichen Problems, dann hat die Differenz $v = u - r$ verschwindende Randwerte und $v(x, y, t)$ genügt dann der folgenden Differentialgleichung:

$$v_{txx} + v_{tyy} - av = f(x, y, t) + a(x, y, t)\, r(x, y, t).$$

Die rechte Seite dieser Differentialgleichung ist wie $f(x, y, t)$ ebenfalls stetig differenzierbar. Umgekehrt ist $v(x, y, t)$ eine Lösung der letzten Differentialgleichung, und es ist: $v(x, y, o) = 0$ für

$x^2+y^2\leqq 1$; $v(x,y,t)=0$ (für $x^2+y^2=1$), so ist $u(x,y,t)=v(x,y,t)+r(x,y,t)$ eine Lösung unseres ursprünglichen Problems. Wir beschäftigen uns daher im folgenden nur mit dem folgenden Problem (B):

$$u_{txx}+u_{tyy}-au=f(x,y,t). \quad \ldots (33)$$
$$u(x,y,o)=0 \quad \text{für } x^2+y^2\leqq 1$$
$$u(x,y,t)=0 \quad \text{für } x^2+y^2=1.$$

Für $a(x,y,t)$, $f(x,y,t)$ bezw. $u(x,y,t)$ gelten dieselben Voraussetzungen bzw. Forderungen.

$u(x,y,t)$ sei eine Lösung des Problems (B). Multiplizieren wir (33), indem wir zunächst ξ, η statt x, y schreiben, mit $K(x,y;\xi,\eta)$ und integrieren sie über $\xi^2+\eta^2\leqq 1$, (hierbei bedeutet $K(x,y;\xi,\eta)$ die Green'sche Funktion des Differentialausdruckes $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$ mit verschwindenden Randwerten), so erhalten wir wegen der Green'schen Formel:

$$u_t(x,y,t)+\iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1} K(x,y;\xi,\eta)[a(\xi,\eta,t)u(\xi,\eta,t)+f(\xi,\eta,t)]d\xi d\eta=0$$
$$\text{für } x^2+y^2\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq T.$$

Integrieren wir diese Gleichung über t von 0 bis t, so bekommen wir wegen $u(x,y,o)=0$ in $x^2+y^2\leqq 1$:

$$u(x,y,t)+\int_0^t d\tau \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1} d\xi d\eta K(x,y;\xi,\eta)[a(\xi,\eta,\tau)u(\xi,\eta,\tau)+f(\xi,\eta,\tau)]$$
$$\text{für } x^2+y^2\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq T. \quad \ldots (34)$$

Wir wollen nun umgekehrt zeigen, daß jede in $x^2+y^2\leqq 1$, $0\leqq t\leqq T$ stetige Lösung $u(x,y,t)$ der Integralgleichung (34) auch unser Problem (B) löst.

Zunächst sieht man aus (34) unmittebar, daß

$$u(x,y,o)=0 \text{ ist für } x^2+y^2\leqq 1.$$

Ferner ist wegen $K(x,y;\xi,\eta)=0$ für $x^2+y^2=1$, $\xi^2+\eta^2<1$ nach (34)

$$u(x,y,t)=0 \text{ für } x^2+y^2=1,\ 0\leqq t\leqq T$$

so daß die Randbedingungen des Problems (B) für $u(x,y,t)$ erfüllt sind[1]).

1) Für in diesem Paragraphen gebrauchte Sätze über Green'sche Funktion siehe: Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Seite 214—218.

Wegen (34) ist $u(x,y,t)$ zunächst wegen der Stetigkeit von $u(x,y,t)$ stetig differenzierbar. Hieraus folgt dann weiter aus einem Satz über $K(x,y;\xi,\eta)$, daß $v(x,y) = \iint_G K(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$ zweimal stetig differenzierbar sind und der Differentialgleichung $\Delta v \equiv v_{xx} + v_{yy} = -\varphi(x,y)$ genügt, falls $\varphi(x,y)$ stetig differenzierbar ist, die zweimalige Differenzierbarkeit nach x und y von $u(x,y,t)$ und $u_t(x,y,t)$.

Differenzieren wir nun (34) nach t, so bekommen wir:

$$u_t(x,y,t) + \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1} K(x,y;\xi,\eta)[a(\xi,\eta,t)u(\xi,\eta,t) + f(\xi,\eta,t)]d\xi d\eta = 0$$

$$\text{für } x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T.$$

Wenden wir hierauf den Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ an, so erhalten wir wegen des vorhin zitierten Satzes über $K(x,y;\xi,\eta)$:

$$u_{txx} + u_{tyy} - a\ u = f(x,y,t)$$

Somit ist gezeigt, daß das Problem (B) und die Auflösung der Integralgleichung (34) äquivalente Probleme sind.

Die Auflösung von (34) erfolgt durch sukzessive Approximation; wir setzen für $0 \leqq t \leqq T,\ x^2+y^2 \leqq 1$:

$$u^{(0)}(x,y,t) = 0$$

$$u^{(n)}(x,y,t) + \int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1} d\xi d\eta K(x,y;\xi,\eta)[a(\xi,\eta,\tau)u^{(n-1)}(\xi,\eta,\tau) + f(\xi,\eta,\tau)] = 0$$

$$\text{für } n = 1, 2, \ldots \quad \ldots (35)$$

Bilden wir die Differenz $u^{(n+1)} - u^{(n)}$, erhalten wir:

$$u^{(n+1)}(x,y,t) - u^{(n)}(x,y,t) + \int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1} d\xi d\eta K(x,y;\xi,\eta)a(\xi,\eta,\tau)$$

$$\times [u^{(n)}(\xi,\eta,\tau) - u^{(n-1)}(\xi,\eta,\tau)] = 0$$

$$\text{für } x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T \quad \ldots (36)$$

Bezeichnen wir das Maximum von $|u^{(n+1)}(x,y,t) - u^{(n)}(x,y,t)|$ in $x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$ mit M_n und $\bar{C}$ sei eine positive Konstante, für die

$$\iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1} d\xi d\eta |K(x,y;\xi,\eta)a(\xi,\eta,\tau)| \leqq \bar{C} \quad \text{für } 0 \leqq \tau \leqq T$$

gilt, so folgt aus (36):

$$M_n \leqq \int_0^t M_{n-1} \bar{C} d\tau \quad \text{für } 1, 2, \ldots,$$

was mit

$$M_n \leqq \frac{(t)^n \cdot \bar{C}^n}{n!} M_o \qquad (o \leqq t \leqq T)$$

gleichbedeutend ist. Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz von $u^{(n)}(x, y, t)$ gegen eine stetige Funktion $u(x, y, t)$ im Bereich $x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$. Lassen wir nun in (35) $u \rightarrow \infty$ streben, so sieht man, daß $u(x, y, t)$ der Integralgleichung (34) genügt. (34) hat aber nur eine Lösung, denn gäbe es zwei etwa $u(x, y, t)$ und $v(x, y, t)$, so würde $w(x, y, t) = u(x, y, t) - v(x, y, t)$ folgender Integralgleichung genügen:

$$w(x, y, t) + \int_0^t d\tau \iint_{\xi^2+\eta^2<1} d\xi d\eta K(x, y; \xi, \eta) a(\xi, \eta, \tau) w(\xi, \eta, \tau) = 0$$

$$\text{in } x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T.$$

Hieraus folgt in derselben Weise wie oben für

$$M = \underset{\substack{x^2+y^2 \leqq 1 \\ 0 \leqq t \leqq T}}{Max} |w(x, y, t)|$$

die Ungleichung:

$$M \leqq \frac{t^n \bar{C}^n}{n!} M \qquad (0 \leqq t \leqq T).$$

Lassen wir $n \rightarrow \infty$ streben, so folgt daraus $M = 0$, was $u(x, y, t) = v(x, y, t)$ zur Folge hat.

Die Lösung des eben behandelten Problems (B) ist im Fall $a = \text{const}$ besonders einfach. Die Lösung wird, wie man aus (34) sieht, durch die bekannte Neumann'sche Reihe geliefert:

$$u(x, y, t) = \sum_{u=1}^{\infty} \Theta^{(n)}(f)$$

$$\text{für } x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T, \text{ wobei}$$

$$\Theta^{(n)}(f) = -(-a)^{n-1} \int_0^t dt \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \iint_{\xi^2+\eta^2<1} d\xi d\eta K^{(n)}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, t_n)$$

$$\text{für } n = 1, 2, \ldots;$$

hierbei ist $K^{(n)}(x, y; \xi, \eta)$ folgendermaßen rekursiv definiert:

$$K^{(1)}(x,y;\xi,\eta) = K(x,y;\xi,\eta)$$
$$K^{(n+1)}(x,y;\xi,\eta) = \iint\limits_{x'^2+y'^2<1} dx'dy' K(x,y;x',y') K^{(n)}(x',y';\xi,\eta)$$
$$\text{für } n = 1, 2, \ldots$$

Nach der bekannten Dreiecksumformungsformel für $n \geqq 1$ (ganz)

$$\int_0^t dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n M(t_n) = \int_0^t dt_n \int_{t_n}^t dt_{n-1} \ldots \int_{t_2}^t dt_1 \, M(t_n) = \int_0^t dt' \frac{(t-t')^{n-1}}{(n-1)!} M(t')$$

ist:

$$\Theta^{(n)}(f) = -(-a)^{n-1} \int_0^t dt' \frac{(t-t')^{n-1}}{(n-1)!} \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1} K^{(n)}(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta,t') d\xi d\eta.$$

Es ist also

$$u(x,y,t) = -\int_0^t dt' \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1} d\xi d\eta K(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta,t')$$
$$-\int_0^t dt' \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1} d\xi d\eta \sum_{u=1}^{\infty} (-a)^n \frac{(t-t')^n}{n!} K^{(n+1)}(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta,t),$$

falls wir zeigen könnten, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-a)^n \frac{(t-t')^n}{n!} K^{(n+1)}(x,y;\xi,\eta)$$

im Bereich $\xi^2 + \eta^2 < 1$, $0 \leqq t' \leqq T$ geichmäßig konvergent ist für $x^2 + y^2 \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$. Seien nun die positiven Konstanten α und α' so gewählt, daß für $x^2 + y^2 \leqq 1$, $\xi^2 + \eta^2 < 1$

$$\iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1} d\xi d\eta \, |K(x,y;\xi,\eta)| \leqq \alpha; \quad |K^{(2)}(x,y;\xi,\eta)| \leqq \alpha'$$

gelten. Dann ist für $x^2 + y^2 \leqq 1$, $\xi^2 + \eta^2 < 1$

$$|K^{(n+1)}(x,y;\xi,\eta)| \leq \alpha' \alpha^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-a)^n \frac{(t-t')^n}{n!} K^{(n+1)}(x,y;\xi,\eta)$$

hat im Bereich $x^2 + y^2 \leqq 1$, $\xi^2 + \eta^2 < 1$; $0 \leqq t, t' \leqq T$ die konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha' \frac{\alpha^{n-1} |a|^n \cdot (2T)^n}{n!}$$

als Majorante, ist also selbst in demselben Bereich gleichmäßig konvergent, was zu beweisen war.

Nach der bekannten Bilearformel, wonach

$$K^{(n+1)}(x,y;\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x,y)\cdot\varphi_i(\xi,\eta)}{\lambda_i^{n+1}} \quad \text{für } n=1,\ 2\ \ldots$$

ist, wobei φ_i die i-te Eigenfunktion, λ_i der i-te Eigenwert der Integralgleichung

$$\varphi(x,y) - \lambda \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1} K(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0$$

bedeutet, ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-a)^n\frac{(t-t')^n}{n!}K^{(n+1)}(x,y;\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-a)^n(t-t')^n}{n!}\frac{\varphi_i(x,y)\cdot\varphi_i(\xi,\eta)}{\lambda_i^{n+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x,y)\cdot\varphi_i(\xi,\eta)}{\lambda_i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-a)^n(t-t')^n}{n!\cdot\lambda_i^n} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x,y)\cdot\varphi_i(\xi,\eta)}{\lambda_i}\left(e^{\frac{-a(t-t')}{\lambda_i}}-1\right)$$

Also ist nach (37)

$$u(x,y,t) = -\int_0^t dt' \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1} d\xi\,d\eta\,K(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta,t')$$

$$-\int_0^t dt' \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<1} d\xi\,d\eta f(\xi,\eta,t')\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x,y)\cdot\varphi_i(\xi,\eta)}{\lambda_i}\cdot\left(e^{\frac{-a(t-t')}{\lambda_i}}-1\right).$$

Anhang.

Es seien $f(x,t)$ $(i=0, \ldots 2p;\ f_{2p}(x,t)=1)$ in dem Bereich $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$ i-mal nach x stetig differenzierbare Funktionen derart, daß jede in $0 \leqq x \leqq 1$ $2p$-mal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{2p} f_i(x,t) u_{x^i} = 0$$

(t aus $0 \leqq t \leqq T$, beliebig aber fest), die den Randbedingungen:

$$u_{x^l}|^{x=0} = u_{x^l}|^{x=1} = 0 \quad (l=0, \ldots p-1)$$

genügt, identisch verschwinden muß. Dann gelten folgende Hilfssätze.

Hilfssatz 1.

Es existiert eine zu der Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{2p} f_i(x,t) u_{x^i} = 0$$

und den Randbedingungen

$$u_{x^l}|^{x=0} = u_{x^l}|^{x=1} = 0 \quad (l=0, \ldots p-1)$$

gehörige Green'sche Funktion, d. h. eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. $G_{x^i}(x,\xi;t)$ $(i=0, \ldots 2p-2)$ sind für $0 \leqq \xi \leqq 1$ in dem Bereiche $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$ stetig $G_{x^{2p-1}}(x,\xi;t)$, $G_{x^{2p}}(x,\xi;t)$ sind für $0 \leqq \xi \leqq 1$ nur in dem Bereich $0 \leqq x \leqq \xi,\ 0 \leqq t \leqq T$ und in dem Bereich $\xi \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$ stetig, so daß sie in $x=\xi$ Sprünge erleiden, und zwar so, daß

$$G_{x^{2p-1}}(x,\xi;t)|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = 1 \text{ ist.}$$

2. $\sum_{i=0}^{2p} f_i(x,t) G_{x^i}(x,\xi;t) = 0$ für $0 \leqq \xi \leqq 1$, im Bereich $0 \leqq x \leqq \xi$, $0 \leqq t \leqq T$ und in $\xi \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$.

3. $G_{x^l}(x,\xi;t)|^{x=0} = G_{x^l}(x,\xi;t)|^{x=1} = 0$ $(l=0, \ldots p-1)$ für $0 \leqq \xi \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$.

Beweis: Bezeichnen wir mit $u^i(x,t)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{2p} f_i(x,t)u_{x^i} = 0,$$

für die

$$u^i{}_{x^k}(o,t) = \delta_{i,k} \quad (i = 0, \ldots 2p-1;\ k = 0, \ldots 2p-1)$$

mit

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

Nach bekannten Sätzen über die Existenz sowie über die Abhängigkeit der Lösungen vom Parameter[1]) von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen steht die Existenz von solchen $u^i(x,t)$ $(i = 0, \ldots 2p-1)$ fest, die sogar für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$ in t stetig sind. Diese $u^i(x,t)$ bilden ein Fundamentalsystem. Die Wronski'sche Determinante

$$\Delta(x,t) = |u^i{}_{x^k}(x,t)| = e^{-\int_0^x f_{2p-1}(x',t)dx'} \neq 0$$

Wir setzen nun

$$G(x,\xi;t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{2p-1} a_i(t)u^i(x,t) & \text{für } 0 \leqq x \leqq \xi \\ \sum_{i=0}^{2p-1} b_i(t)u^i(x,t) & \text{für } \xi \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

Wegen Bedingung 1 müssen gelten

$$\sum_{i=0}^{2p-1} [b_i(t) - a_i(t)]u^i{}_{x^k}(\xi,t) = 0 \qquad \text{für } k = 0, \ldots 2p-2.$$

$$\sum_{i=0}^{2p-1} [b_i(t) - a_i(t)]u^i{}_{x^{2p-1}}(\xi,t) = 1$$

Dieses lineare Gleichungssystem in den Unbekannten $[b_i(t) - a_i(t)]$, dessen Determinante gleich $\Delta(\xi,t)$ also ungleich Null ist, läßt sich auflösen. Wir bekommen $b_i(t) - a_i(t) = c_i(t)$.

Nun müssen wegen Bedingung 3 gelten

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{2p-1} a_i(t)u^i{}_{x^l}(0,t) = 0 \\ &\sum_{i=0}^{2p-1} b_i(t)u^i{}_{x^l}(1,t) = 0 \end{aligned} \qquad (l = 0, \ldots p-1)$$

1) Über Abhängigkeit der Lösung siehe: Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen Seite 145.

oder wegen $b_i(t) - a_i(t) = c_i(t)$

$$\sum_{i=0}^{2p-1} a_i(t) u^i{}_{x^l}(0,t) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{2p-1} a_i(t) u^i{}_{x^l}(1,t) = -\sum_{i=0}^{2p-1} c_i(t) u^i{}_{x^l}(1,t) \qquad (l = 0 \,..\, p-1).$$

Die Determinante dieses linearen Gleichungssystems ist ebenfalls von Null verschieden, denn sonst würde das zugehörige homogene System für ein gewisses $t = t'$ ein nicht triviales Lösungssystem haben, was zur Folge hat, daß die nicht verschwindende Funktion $u(x) = \sum_{i=0}^{2p-1} a_i(t') u^i(x,t')$ die Randaufgabe lösen würde:

$$\sum_{i=0}^{2p} f(x,t') u_{x^i} = 0; \; u_{x^l}/^{x=0} = u_{x^l}/^{x=1} = 0 \;\; (l = 0, \,..\, p-1),$$

was nach unserer Voraussetzung über f_i unmöglich ist. Wir können also $a_i(t)$ $(i = 0, \,..\, 2p-1)$ aus dem Gleichungssystem berechnen. Da wir $c_i(t)$ bereits kennen, kennen wir auch $b_i(t)$. Daß umgekehrt diese so konstruierte $G(x,\xi;t)$ alle verlangten Eigenschaften besitzt, kann man es leicht rückwärts verifizieren.

Hilfssatz 2.

Die folgende Randwertaufgabe:

$$\sum_{i=0}^{2p} (-1)^i \frac{\partial^i (f_i(x,t)u)}{\partial x^i} = 0$$

$$u_{x^l}/^{x=0} = u_{x^l}/^{x=1} = 0 \;\; (l = 0, \,..\, p-1)$$

hat ebenfalls nur die Lösung $u(x,t) \equiv 0$.

Beweis: $G(x,\xi;t)$ sei die Green'sche Funktion im Hilfssatz 1, u sei eine Lösung der Randwertaufgabe.

Nach der Green'schen Formel ist:

$$\int_0^1 u(x,t) \sum_{i=0}^{2p} f_i(x,t) G_{x^i}(x,\xi;t) = \left[\sum_{i=0}^{2p} \sum_{l=1}^{i} (-1)^{l-1} (f_i u)_{x^{l-1}} G_{x^{i-l}} \right]/_{x=0}^{x=1}$$

$$+ u(\xi,t) \cdot G_{x^{2p-1}}(x,\xi;t)/_{x=\xi+0}^{x=\xi-0} + \int_0^1 \sum_{i=0}^{2p} (-1)^i (f_i u)_{x^i} G dx,$$

woraus folgt $u(\xi,t) = 0$ für $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$, also auch $u(x,t) = 0$ für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$.

Folgerung aus Hilfssatz 2. Nach Hilfssatz 1 gibt es eine zu unserer Randwertaufgabe gehörige Green'sche Funktion $K(x,\xi;t)$.

Hilfssatz 3.

Es ist für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq \xi \leqq 1$, $x \neq \xi$, $0 \leqq t \leqq T$: $G(x, \xi; t) = K(\xi, x; t)$.

Beweis: Die Green'sche Formel für $G(x, \xi_2; t)$ und $K(x, \xi_1; t)$ $(\xi_1 \neq \xi_2)$ lautet:

$$\int_0^1 K(x, \xi_1; t) \sum_{i=0}^{2p} f_i(x,t) G_{x^i}(x, \xi_2; t)\, dx = \left[\sum_{i=0}^{2p} \sum_{l=1}^{i} (-1)^{l-1} (f_i K)_{x^{l-1}} \cdot G_{x^{i-l}} \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$+ K(\xi_2, \xi_1; t) \cdot G_{x^{2p-1}}(x, \xi_2; t)\Big|_{x=\xi_2+0}^{x=\xi_2-0} - G(\xi_1, \xi_2; t) K_{x^{2p-1}}(x, \xi_1; t)\Big|_{x=\xi_1+0}^{x=\xi_1-0}$$

$$+ \int_0^1 \sum_{i=0}^{2p} (-1)^i (f_i K)_{x^i} dx$$

woraus folgt:

$$K(\xi_2, \xi_1; t) = G(\xi_1, \xi_2; t) \quad \text{w. z. b. w.}$$

Aus diesem Hilfssatz folgt, daß $G_{x^i}(x, \xi; t)$ $(i = 0, \ldots 2p-2)$; $K_{\xi^i}(\xi, x; t)$ $(i = 0, \ldots 2p-2)$ in dem Bereich $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$ in allen drei Variabeln stetig sind, während $G_{x^{2p-1}}(x, \xi; t)$, $K_{\xi^{2p-1}}(\xi, x; t)$, $G_{x^{2p}}(x, \xi; t)$, $K_{\xi^{2p}}(\xi, x; t)$ in allen drei Variabeln nur in dem Bereich $x \leqq \xi$; $0 \leqq x, \xi \leqq 1$; $0 \leqq t \leqq T$ und in dem Bereich $\xi \leqq x$; $0 \leqq x, \xi \leqq 1$; $0 \leqq t \leqq T$ stetig sind.

Hilfssatz 4.

$g(x,y)$ sei eine in beiden Dreiecken $x \leqq y$, $0 \leqq x, y \leqq 1$ und $x \geqq y$, $0 \leqq x, y \leqq 1$ stetige Funktion. Dann ist die folgende quellenmäßig dargestellte Funktion $\int_0^1 G(x, \xi; t) g(x, y)\, dx$ in dem Intervall $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ $(2p-1)$-mal nach ξ stetig differenzierbar.

Beweis: Wegen Hilfssatz 3: $G(x, \xi; t) = K(\xi, x; t)$ $(x \neq \xi)$ sind $G_{\xi^i}(x, \xi; t)$ $(i = 0, \ldots 2p-2)$ in dem Bereiche $0 \leqq x, \xi \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$ stetig, während $G_{\xi^{2p-1}}(x, \xi; t)$ nur in dem Bereich $x \leqq \xi$; $0 \leqq x, \xi \leqq 1$; $0 \leqq t \leqq T$ und in dem Bereich $x \geqq \xi$; $0 \leqq x, \xi \leqq 1$; $0 \leqq t \leqq T$ stetig sind.

Es ist daher für $0 \leqq \xi, y \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T$: $i = 0, \ldots 2p-2$:

$$\frac{d^i}{d\xi^i} \int_0^1 G(x, \xi; t) g(x, y)\, dx = \int_0^1 G_{\xi^i}(x, \xi; t) g(x, y)\, dx$$

Ferner ist für $\xi \leqq y;\ 0 \leqq y, \xi \leqq 1;\ 0 \leqq t \leqq T$:

$$\frac{d^{2p-1}}{d\xi^{2p-1}} \int G(x,\xi;\ t)g(x,y)dx = \frac{d}{d\xi} \int_0^1 G_{\xi^{2p-2}}(x,\xi;\ t)g(x,y)dx$$

$$= \frac{d}{d\xi}\left(\int_0^{\xi} G_{\xi^{2p-2}}(x,\xi;\ t)g(x,y)dx + \int_{\xi}^{y} G_{\xi^{2p-2}} \cdot g dx + \int_y^1 G_{\xi^{2p-2}} \cdot g dx \right)$$

$$= \int_0^1 G_{\xi^{2p-1}}(x,\xi;\ t)g(x,y)dx,$$

ebenso für $y \leqq \xi;\ 0 \leqq y, \xi \leqq 1;\ 0 \leqq t \leqq T$:

$$\frac{d^{2p-1}}{d\xi_{2p-1}} \int_0^1 G(x,\ \xi;\ t)g(x,\ y)\,dx = \int_0^1 G_{\xi^{2p-1}}(x,\ \xi;\ t)g(x,y)dx.$$

Da nun alle $\int_0^1 G_{\xi^i}(x,\xi;\ t)g(x,y)dx$ $(i = 0,\ \ldots\ 2p-1)$ im Bereich $0 \leqq \xi, y \leqq 1;\ 0 \leqq t \leqq T$ stetig sind, ist unser Satz bewiesen.

Lebenslauf.

Ich, Djiang Schuo-min bin am 4. Februar 1910 in Peking als Sohn eines Offiziers geboren. Ich bin chinesischer Staatsangehöriger und gehöre keiner Religion an. Im Winter 1915 ging ich in Peking zur Volksschule, wo ich sie 1922 absolvierte. Darauf besuchte ich die Gymnasialabteilung der Tungchi-Universität in Woosung, wo ich im Sommer 1928 mein Zeugnis der Reife erlangte. Hierauf kam ich nach Deutschland und studierte Mathematik an der Universität Göttingen von 1928/29 bis 1933/34 an der Universität Marburg von 1934/35 bis 1935, wo ich am 26. Juni 1935 im mündlichen geprüft wurde. Meine Lehrer an den Universitäten sind: Courant, Herglotz, Lewy, Nordheim, Reidemeister und Rellich.